

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Жарких Д.О., студент

Бигаева Л.А., к.ф.-м.н., доцент

Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

Аннотация. В статье рассматривается применение метода Рунге-Кутты четвертого порядка для численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Подробно излагается алгоритм метода. Представлены результаты численного эксперимента, демонстрирующие эффективность метода на тестовой задаче.

Ключевые слова: метод Рунге-Кутты, задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения, численные методы, точность.

Многие задачи в физике, инженерии и других областях науки приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Однако аналитическое решение таких уравнений возможно лишь для ограниченного числа случаев. В остальных случаях применяются численные методы, позволяющие получить приближенное решение с заданной точностью. Один из наиболее распространенных и эффективных методов – это метод Рунге-Кутты.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Требуется найти приближенное решение функции $y(x)$ с заданной точностью ε на интервале $[x_0, x_n]$.

Одним из самых точных и оптимальных методов интегрирования таких уравнений является метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который для каждого узла i использует итерационную формулу[2]:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{h}{6}\right)(r_1 + 2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_3 + r_4), \text{ где}$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} - \text{шаг интегрирования,}$$

y_i – приближенное значение функции в $x_i = x_0 + ih$,

$$r_1 = hf(x_i, y_i), r_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{r_1}{2}\right),$$

$$r_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{r_2}{2}\right), r_4 = hf(x_i + h, y_i + r_3).$$

Рассмотрим тестовую задачу $y' = x + y, y(0) = 1$ при двух разных значениях h : 0,1 и 0,05. Известно, что аналитическим (точным) решением является функция $y = 2 \cdot e^x - x - 1$.

Для численного решения данной тестовой задачи применены несколько методов интегрирования ОДУ в сравнении, а именно метод Эйлера, методы Рунге-Кутты различных порядков, которые реализованы на языке программирования Python.

Результаты работы представлены в таблице 1.

Таблица 1. Расчетные значения и значения аналитического решения

Метод	Шаг h	Приближенное решение $y(1)$	Аналитическое (точное решение)	Погрешность решения
Метод Эйлера	0,1	3,1875	3,4365636	0,2490636
	0,05	3,3066	3,4365636	0,1299636
Метод Рунге- Кутта 2-го порядка	0,1	3,4282	3,4365636	0,0083636
	0,05	3,4344	3,4365636	0,0021636
Метод Рунге- Кутта 3-го порядка	0,1	3,4364	3,4365636	0,0001636
	0,05	3,4365	3,4365636	0,0000636
Метод Рунге- Кутта 4-го	0,1	3,4365595	3,4365636	0,0000042
	0,05	3,4365633	3,4365636	0,0000003

порядка				
---------	--	--	--	--

Как видно из таблицы, метод Рунге-Кутты четвертого порядка обеспечивает более высокую точность, а именно $O(h^4)$, в то время как точность метода Эйлера - $O(h)$, точность метода Рунге-Кутты второго порядка - $O(h^2)$, метода Рунге-Кутты третьего порядка - $O(h^3)$ [1, 3].

Таким образом, метод Рунге-Кутты четвертого порядка является эффективным численным методом для решения ОДУ. Он применяется для задач, где требуется достижение высокой точности. Однако, для более сложных задач стоит рассматривать методы более высоких порядков или иные методы, но стоит учитывать, что они, в большинстве случаев, будут иметь большой объем вычислений.

Литература

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 634 с.
2. Бигаева, Л. А. Курс лекций по численным методам: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Л. А. Бигаева, И. И. Латыпов. — Издание правленое и дополненное. — Бирск: Бирский филиал Башкирского государственного университета, 2019. — 139 с. — ISBN 978-5-86607-476-5. — EDN KWOELH.
3. Лапчик М. П. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов/ М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; Под ред. М. П. Лапчика. — М.: Издательский центр «Академия», 2004. — 384 с.